

Sur le calcul des modules d'élasticité des stratifiés à fibres orientées

М. Кметов

Introduction

L'exposé suivant se rapporte au problème de la détermination analytique des modules d'élasticité des stratifiés renforcés dans deux sens perpendiculaires. Le problème est traité dans des conditions d'élasticité pure et d'état de contraintes bidimensionnelles. Le cas d'état de contraintes unidimensionnelles est traité comme un cas particulier.

Le modèle théorique d'un stratifié renforcé dans deux sens perpendiculaires est présenté à la fig. 1.

Historique du problème

Trois méthodes principales existent pour le traitement du problème :

a. Méthode des sections réduites. Cette méthode est largement utilisée. Elle est basée sur le „théorème des sommes“ :

$$x = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^{i=v} x_i F_i,$$

x étant la caractéristique du stratifié; x_i la caractéristique d'un des composants, F et F_i , resp. les sections transversales du stratifié et du composant. Dans le cas d'un stratifié à deux composants (résine et verre), $v=2$. Cette méthode fut introduite pour le calcul des plastiques renforcées par Dietz et Sonneborn, ensuite développé par Beer, Niederstadt, Corten, Lang, Skudra et autres.

b. Méthode variationnelle. Cette méthode est développée par Hachin et Rosen. Elle est basée sur un traitement mathématique plus précis. Elle démontre, que les résultats obtenus par la méthode des sections réduites, sont suffisamment précis pour la plupart des cas utilisés dans la pratique.

c. Méthode de Hill. Selon cette méthode les caractéristiques mécaniques des stratifiés doivent être calculées à l'aide de deux matrices déterminant les limites supérieures et inférieures de la valeur de la caractéristique examinée. Les matrices doivent être composées pour chaque cas particulier de renforcement. Pour cette raison la méthode ne peut pas être considérée pour l'instant comme une méthode pratique.

Modules d'élasticité des stratifiés unidirectionnels

Considérons la couche élémentaire d'épaisseur d_1 de la fig. 1, en supposant que la deuxième couche d_2 n'existe pas.

Si une force est appliquée dans le sens x ,

$$\varepsilon_{1x} = \varepsilon_{1xv} = \varepsilon_{1xr}.$$

$$\sigma_{1x} = \sigma_{1v}\mu_1 + \sigma_{1r}(1 - \mu_1).$$

Comme conséquence de ces deux équations, on obtient facilement :

$$(1) \quad E_{1x} = E_v\mu_1 + E_r(1 - \mu_1).$$

L'indice v se rapporte au renforcement (fibres de verre), l'indice r — à la résine, μ étant la teneur volumétrique du verre.

Si sur la même couche est appliquée une force dans le sens y ,

$$\varepsilon_{1y} = \varepsilon_{1yv}\mu_1 + \varepsilon_{1yr}(1 - \mu_1);$$

$$\sigma_{1y} = \sigma_{1yv} = \sigma_{1yr}.$$

Pour ce cas de chargement, on obtient

$$(2) \quad E_{1y} = \frac{nE_r}{\mu_1 + n(1 - \mu_1)},$$

n étant $n = \frac{E_v}{E_r}$.

Les formules (1) et (2), appliquées sur la couche élémentaire d'épaisseur d_2 , renforcée en sens y donnent

$$E_{2x} = \frac{nE_r}{\mu_2 + n(1 - \mu_2)};$$

$$E_{2y} = E_v\mu_2 + E_r(1 - \mu_2).$$

Ces résultats ont été obtenus par la méthode des sections réduites et sont donnés ici dans la forme présentée par Corten. Ils serviront comme point de base pour la considération du problème plus général du renforcement dans les sens x et y en état de contrainte bidimensionnelles.

Modules d'élasticité de stratifiés renforcés dans deux sens perpendiculaires

Pour l'étude de ce cas, la plaque renforcée dans les deux sens x et y (fig. 1), sera considérée comme une association de deux couches élémentaires qui se déforment ensemble.

Dans les sens x et y seront appliquées deux forces P_x et P_y . Ces forces seront partagées entre les deux couches (P_{1x} , P_{2x} , P_{1y} , P_{2y}), selon leurs rigidités dans les deux directions et l'on aura

$$(3) \quad P_x = P_{1x} + P_{2x};$$

$$(4) \quad P_y = P_{1y} + P_{2y}.$$

Les conditions de déformations uniformes sont

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{1x} = \varepsilon_{2x};$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{1y} = \varepsilon_{2y}.$$

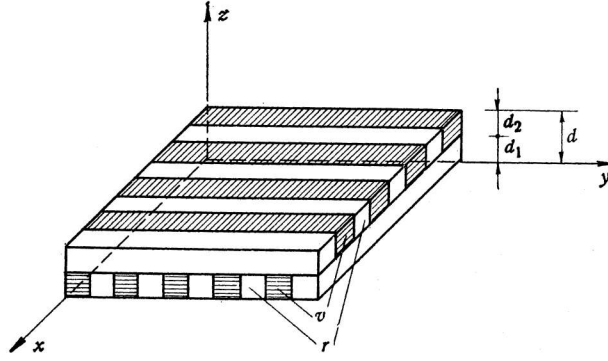


Fig. 1

Pour le cas de contraintes bidirectionnelles, les déformations seront (en cas d'orthotropie)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1x} &= \frac{\sigma_{1x}}{E_{1x}} - \nu_{1x} \frac{\sigma_{1y}}{E_{1y}} = \frac{P_{1x}}{E_{1x}d_1} - \nu_{1x} \frac{P_{1y}}{E_{1y}d_1}; \\ \varepsilon_{2x} &= \frac{\sigma_{2x}}{E_{2x}} - \nu_{2x} \frac{\sigma_{2y}}{E_{2y}} = \frac{P_{2x}}{E_{2x}d_2} - \nu_{2x} \frac{P_{2y}}{E_{2y}d_2},\end{aligned}$$

analogues pour ε_{1y} et ε_{2y} .

La condition d'égalité des déformations en sens x sera

$$\varepsilon_{1x} = \varepsilon_{2x},$$

$$(5) \quad \frac{P_{1x}}{E_{1x}d_1} - \nu_{1x} \frac{P_{1y}}{E_{1y}d_1} = \frac{P_{2x}}{E_{2x}d_2} - \nu_{2x} \frac{P_{2y}}{E_{2y}d_2},$$

et d'égalité des déformations en sens y

$$(6) \quad \frac{P_{1y}}{E_{1y}d_1} - \nu_{1y} \frac{P_{1x}}{E_{1x}d_1} = \frac{P_{2y}}{E_{2y}d_2} - \nu_{2y} \frac{P_{2x}}{E_{2x}d_2}.$$

La solution des équations (3), (4), (5) et (6) à rapport aux inconnues P_{1x} , P_{2x} , P_{1y} , P_{2y} donne

$$(7) \quad P_{1x} = \frac{d_1}{d_2} \cdot \frac{\left[\frac{1}{E_{2x}} - \nu_{2y} k_{1y} \frac{E_{2y}}{E_{2x}} \left(\frac{\nu_{1x}}{E_{1y}} \cdot \frac{d_2}{d_1} + \frac{\nu_{2x}}{E_{2y}} \right) \right] P_x + \left[k_{1y} \left(\frac{\nu_{1x}}{E_{1y}} \cdot \frac{d_2}{d_1} + \frac{\nu_{2x}}{E_{2y}} \right) - \frac{\nu_{2x}}{E_{2y}} \right] P_y}{\frac{1}{E_{1x}} + \frac{1}{E_{2x}} \cdot \frac{d_1}{d_2} - \left(\nu_{1y} k_{2y} \frac{E_{1y}}{E_{1x}} + \nu_{2y} k_{1y} \frac{E_{2y}}{E_{2x}} \right) \left(\frac{\nu_{1x}}{E_{1y}} + \frac{\nu_{2x}}{E_{2y}} \cdot \frac{d_1}{d_2} \right)}.$$

À cause de symétrie des équations, les expressions P_{2x} , P_{1y} et P_{2y} auront la même structure que (7), en changeant les indices selon le schéma suivant:

$$(8) \quad P_{2x} = \dots (1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 1) \text{ ou } P_{2x} = P_x - P_{1x};$$

$$(9) \quad P_{1y} = \dots (x \rightarrow y; y \rightarrow x) \text{ ou } P_{1y} = P_y - P_{2y};$$

$$(10) \quad P_{2y} = \dots (1 \rightarrow 2; 2 \rightarrow 1; x \rightarrow y; y \rightarrow x).$$

Dans les formules (7) — (10) existent les coefficients

$$k_{1x} = \frac{E_{1x}}{E_{1x} + E_{2x} \frac{d_2}{d_1}}; \quad k_{2x} = \frac{E_{2x}}{E_{1x} \frac{d_1}{d_2} + E_{2x}};$$

$$k_{1y} = \frac{E_{1y}}{E_{1y} + E_{2y} \frac{d_2}{d_1}}; \quad k_{2y} = \frac{E_{2y}}{E_{1y} \frac{d_1}{d_2} + E_{2y}},$$

qui peuvent être définis comme coefficients de distribution.

Pour obtenir les modules d'élasticité du stratifié renforcé dans les deux sens dans des conditions d'état de contraintes bidimensionnelles, les conditions

$$(11) \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{1x},$$

$$\frac{P_x}{E_x d} - \nu_x \frac{P_y}{E_y d} = \frac{P_{1x}}{E_{1x} d_1} - \nu_{1x} \frac{P_{1y}}{E_{1y} d_1}$$

et

$$(12) \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{1y},$$

$$\frac{P_y}{E_y d} - \nu_y \frac{P_x}{E_x d} = \frac{P_{1y}}{E_{1y} d_1} - \nu_{1y} \frac{P_{1x}}{E_{1x} d_1}$$

seront utilisées.

La solution des équations (11) et (12) par rapport aux inconnues E_x et E_y s'écrit

$$(13) \quad E_x = P_x \frac{d_1}{d} \cdot \frac{(1 - \nu_x \nu_y)}{\frac{P_{1x}}{E_{1x}} (1 - \nu_x \nu_{1y}) + \frac{P_{1y}}{E_{1y}} (\nu_x - \nu_{1x})};$$

$$(14) \quad E_y = P_y \frac{d_2}{d} \cdot \frac{(1 - \nu_x \nu_y)}{\frac{P_{2y}}{E_{2y}} (1 - \nu_y \nu_{2x}) + \frac{P_{2x}}{E_{2x}} (\nu_y - \nu_{2y})}.$$

Les résultats obtenus pour l'état de contraintes biaxiales, peuvent être utilisés facilement dans le cas de contraintes uniaxiales. Si la plaque est soumise à l'action seulement de la force P_x , il suffit de mettre dans les formules:

$$P_y = P_{1y} = P_{2y} = 0, \text{ ainsi que } \nu_{nk} = 0 \quad (n = 1, 2; k = x, y).$$

On obtient

$$(15) \quad E_x = \frac{P_x}{P_{1x}} \cdot \frac{d_1}{d} E_{1x},$$

et

$$(16) \quad P_{1x} = P_x \frac{E_{1x} d_1}{E_{1x} d_1 + E_{2x} d_2} = k_{1x} P_x.$$

En remplaçant (16) dans (15), on obtient finalement pour ce cas

$$(17) \quad E_x = \frac{d_1}{d} E_{1x} + \frac{d_2}{d} E_{2x}.$$

Dans les formules (13), (14), ainsi que dans (17), interviennent les épaisseurs des couches élémentaires (d_1 , d_2), ainsi que l'épaisseur totale (d). Les épaisseurs nominales de chaque sorte de tissu sont généralement données par le producteur. Dans les formules précédentes les épaisseurs se présentent sous forme de rapports. Pour cette raison on peut imposer l'hypothèse que les rapports des épaisseurs du tissu non imprégné restent identiques avant et après moulage, même un moulage sous pression.

Une formule de ce type dans le cas d'état de tension uniaxiale a été obtenue par Beer en 1959 sous la forme

$$(18) \quad E_x = A_x E_{1x} + A_y E_{2y}.$$

Les coefficients A_x et A_y étant définis sous la forme

$$A_x = \frac{f_{ax}}{f_{ax} + f_{ay}}; \quad A_y = \frac{f_{ay}}{f_{ax} + f_{ay}},$$

f_{ax} , f_{ay} , étant les sections transversales des fibres de renforcement dans les deux sens.

Il est évident, que pour l'obtention de cette formule le théorème des sommes est directement appliqué. Comme facteur déterminant l'influence des modules des couches élémentaires, le pourcentage de verre dans les deux sens est utilisé. En revanche, dans les formules obtenues ci-dessus, le théorème des sommes est utilisé, mais l'influence des modules d'élasticité des couches élémentaires est pris en compte par la rigidité des deux couches dans le sens étudié.

A notre avis c'est un raisonnement plus correct, basé sur les déformations uniformes des deux couches élémentaires.

Les formules (17) et (18) peuvent être analysées brièvement. Les deux formules seront identiques, si

$$\frac{d_1}{d} = A_x \quad \text{et} \quad \frac{d_2}{d} = A_y$$

ou

$$\frac{f_{ax}}{d_1} = \frac{f_{ax} + f_{ay}}{d} \quad \text{et} \quad \frac{f_{ay}}{d_2} = \frac{f_{ax} + f_{ay}}{d},$$

ce qui signifie

$$\frac{f_{ax}}{d_1} = \frac{f_{ay}}{d_2} = \frac{f_{ax} + f_{ay}}{d},$$

$$(19) \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu,$$

μ_1 et μ_2 , étant les teneurs volumétriques des couches élémentaires et μ , étant la teneur volumétrique de la plaque composite.

Il peut exister neuf cas de renforcement différents:

$$1^\circ f_{ax} = f_{ay}, \quad d_1 = d_2 \quad (\phi_x = \phi_y),$$

$$2^\circ f_{ax} > f_{ay}, \quad d_1 = d_2 \quad (\phi_x = \phi_y),$$

$$3^\circ f_{ax} < f_{ay}, \quad d_1 = d_2 \quad (\phi_x = \phi_y),$$

$$4^\circ f_{ax} = f_{ay}, \quad d_1 > d_2 \quad (\phi_x > \phi_y),$$

$$5^\circ f_{ax} = f_{ay}, \quad d_1 < d_2 \quad (\phi_x < \phi_y),$$

$$6^\circ f_{ax} > f_{ay}, \quad d_1 > d_2 \quad (\phi_x > \phi_y),$$

$$7^\circ f_{ax} > f_{ay}, \quad d_1 < d_2 \quad (\phi_x < \phi_y),$$

$$8^\circ f_{ax} < f_{ay}, \quad d_1 > d_2 \quad (\phi_x > \phi_y),$$

$$9^\circ f_{ax} < f_{ay}, \quad d_1 < d_2 \quad (\phi_x < \phi_y),$$

ϕ étant le diamètre des fils.

Des 9 cas mentionnés, seulement dans le premier, la condition (19) est toujours satisfaite et $A_x = \frac{d_1}{d} = A_y = \frac{d_2}{d} = 0,5$. Dans le sixième et le neuvième

cas, à condition que (19) soit satisfaite, les deux formules (17) et (18) sont identiques. Pour tous les autres cas il est évident que la condition (19) n'est pas satisfaite et les deux formules ne sont pas identiques.

Détermination des coefficients de Poisson

Pour pouvoir utiliser les formules proposées dans le cas de contraintes bidimensionnelles il est nécessaire de pouvoir calculer les coefficients de Poisson des couches élémentaires (ν_{1x} , ν_{2x} , ν_{1y} , ν_{2y}) ainsi que de la plaque composite (ν_x , ν_y).

Couche élémentaire renforcée dans un sens

Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs. Ici nous donnons les résultats obtenus par Corten.

Pour la couche d'épaisseur d_1 , renforcée dans le sens x et soumise à l'action d'une force P_x , dans le sens du renforcement le coefficient de Poisson ν_{1x} est

$$(20) \quad \nu_{1x} = \nu_v \mu_1 + \nu_r (1 - \mu_1),$$

tandis que pour la même plaque, soumise à l'action de la force P_y dans le sens perpendiculaire au renforcement, le coefficient de Poisson ν_{1y} est

$$(21) \quad \nu_{1y} = \frac{n[\nu_v \mu_1 + \nu_r (1 - \mu_1)]}{[\mu_1 + n(1 - \mu_1)][n\mu_1 + 1 - \mu_1]}.$$

Les expressions pour ν_{2x} et ν_{2y} sont analogues.

Plaque renforcée dans deux directions

Dans ce cas de renforcement, le théorème des sommes est utilisé, mais pour les raisons mentionnées ci-dessus, l'influence des deux couches élémentaires sera prise en considération à l'aide de leurs rigidités. Sous l'action de la force P_x , le coefficient de Poisson sera

$$(22) \quad \nu_x = \frac{d_1 E_{1y}}{d E_y} \nu_{1x} + \frac{d_2 E_{2y}}{d E_y} \nu_{2x}.$$

En remplaçant E_y selon (17)

$$E_y = \frac{d_1}{d} E_{1y} + \frac{d_2}{d} E_{2y}$$

on obtient

$$(23) \quad \nu_x = \frac{d_1 E_{1y} \nu_{1x} + d_2 E_{2y} \nu_{2x}}{d_1 E_{1y} + d_2 E_{2y}}.$$

Dans la formule analogue proposée par Beer, les épaisseurs d_1 et d_2 sont remplacées par les coefficients A_x et A_y . L'interprétation de cette différence est identique à celle des modules d'élasticité.

Conclusion

En résumé on peut dire que les formules proposées jusqu' à présent, basées sur l'application directe du théorème des sommes peuvent être considérées comme valables et applicables dans certains cas. On doit avouer que ces cas coïncident avec un grand nombre de cas rencontrés en pratique, mais tant qu'il s'agit d'une étude théorique, le mécanisme de travail de la plaque composite doit être étudié dans tous les cas possibles de renforcement.

Les résultats obtenus montrent qu'en utilisant la méthode des sections réduites et en introduisant les rigidités des couches élémentaires, on peut obtenir la solution du problème dans le cas le plus général.

L'étude fournit la solution du problème dans le cas d'état de tensions bidimensionnelles.

Bibliographie

1. Corten, H. T. Reinforced plastics, ed. by E. Beer. (trad. russe 1967).
2. Тарнопольский, Ю. М., А. М. Скудра. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Рига, 1966.
3. Lang, M. G. Stratifiés à fibres orientées solidarisées. Plastiques renforcés, 7, 1967.
4. Beer, F. Die Festigkeitseigenschaften kreuzweise bewehrten Kunststoffe. VDI-Ztschr. 101, 59, 12.
5. Dietz, A. G. H., R. H. Sonneborn. Fiberglass Reinforced Plastics, N. Y., 1954,

Постъпила на 2. IV. 1971 г.